ISRAEL JOURNAL OF MATHEMATICS 105 (1998), 263–283

UNE MAJORATION DE LA MULTIPLICITÉ SPECTRALE D'OPÉRATEURS ASSOCIÉS À DES COCYCLES RÉGULIERS

BY

MÉLANIE GUENAIS

Laboratoire d'Analyse, Géométrie et Applications, URA 742 du CNRS
Université Paris-Nord, 93430 Villetaneuse, France
e-mail: guenais@math.univ-paris13.fr

ABSTRACT

We study the spectral multiplicity of unitary operators of $L^2(\mathbb{T})$ defined by cocycles over an irrational rotation α. We prove that the multiplicity is finite whenever the cocycle has bounded variation and we give explicit bounds. For a cocycle given by an absolutely continuous function ϕ on $[0,1]$, we show that the multiplicity is strictly less than $\max(2, |\int \phi'(x)dx| + 1)$, which is optimal in the case $\phi(x) = nx$ (where the multiplicity is exactly n). The proofs are based on the representation of the rotation as a "local rank one" transformation, which arises from the continued fraction expansion of α.

1. Introduction

Soit $T: x \to x+\alpha \pmod 1$ une rotation irrationnelle sur le cercle. On s'intéresse à la multiplicité spectrale des opérateurs de $L^2(\mathbb{T})$ associés à un cocycle, au dessus de T, définis par

$$V_{e^{2i\pi\phi}} f = e^{2i\pi\phi} f o T,$$

où ϕ est une application mesurable de $\mathbb{T}$ dans $\mathbb{T}$ qu'on appellera cocycle : on considèrera par la suite ϕ comme une fonction de l'intervalle [0,1], à valeurs dans $\mathbb{R}$. Ces opérateurs apparaissent en théorie ergodique dans l'étude des produits croisés de Anzaï ([1]) sur $\mathbb{T} \times \mathbb{T}$

$$T_\phi(x,y) = (Tx, \phi(x) + y).$$

Received June 9, 1996

En notant L_n le sous-espace $L_n = \{f(x)\,\mathrm{e}^{2\imath\pi ny}, f \in L^2(\mathbb{T})\}$, on peut décomposer $L^2(\mathbb{T}\times\mathbb{T})$ sous la forme

$$L^2(\mathbb{T}\times\mathbb{T}) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} L_n.$$

Les sous-espaces L_n sont stables par l'opérateur de $L^2(\mathbb{T}\times\mathbb{T})$ associé à T_ϕ, $U_{T_\phi} f = f o T_\phi$, et la restriction de U_{T_ϕ} à L_n est unitairement équivalente à $V_{\mathrm{e}^{2\imath\pi n\phi}}$. L'étude spectrale de T_ϕ se ramène donc à l'étude spectrale de la famille des opérateurs $V_{\mathrm{e}^{2\imath\pi n\phi}}$.

Rappelons que la **multiplicité spectrale** d'un opérateur unitaire U sur un espace de Hilbert H séparable est le nombre minimal (fini ou infini) d'éléments $f_1, \dots, f_m$ pour lesquels il existe une décomposition

$$H = \bigoplus_{n>0} [U, f_n].$$

$[U, f_n]$ désigne le sous-espace fermé cyclique engendré par f_n sous U (à savoir l'espace fermé de H engendré par les $(U^k f_n)_{k\in\mathbb{Z}}$). On peut imposer de plus que les mesures spectrales σ_n associées aux f_n (et définies par $\widehat{\sigma}_n(k) =< U^k f_n, f_n >$) vérifient

$$\sigma_n \ll \sigma_{n-1} \ll \cdots \ll \sigma_1.$$

σ_1 est alors équivalent au type spectral maximal σ de U. Dans ce cas la suite des mesures σ_n est unique à équivalence près. Notons B_n tel que $\sigma_n \sim 1_{B_n}\sigma$, la **fonction de multiplicité** est la fonction de [0,1], à valeurs dans $\overline{\mathbb{N}}$, définie σ-presque partout par

$$m(t) = \sum_{1}^{+\infty} 1_{B_n}(t).$$

Il y a assez peu de résultats sur la multiplicité spectrale des opérateurs $V_{\mathrm{e}^{2\imath\pi\phi}}$, alors que les propriétés du type spectral maximal sont mieux connues. Des résultats classiques pour les translations ergodiques ([6]) montrent que le type spectral maximal de ces opérateurs est pur : σ est soit discrète, soit continue purement singulière, soit équivalente à la mesure de Lebesgue. De plus, la multiplicité est uniforme, et son étude est réduite à l'estimation d'une constante.

Dans le cas particulier d'un cocycle linéaire $\phi(x) = nx$, on sait que $V_{\mathrm{e}^{2\imath\pi\phi}}$ admet un spectre de Lebesgue et une multiplicité égale à n : considérons les espaces cycliques engendrés par les fonctions $\mathrm{e}^{2i\pi kx}$ pour $k \in \mathbb{N}_{n-1}$, on vérifie facilement que $[V_{\mathrm{e}^{2\imath\pi\phi}}, \mathrm{e}^{2\imath\pi kx}]$ est l'espace fermé engendré par les fonctions $(\mathrm{e}^{2i\pi(k+\jmath n)x})_{j\in\mathbb{Z}}$. On a ainsi une décomposition de $L^2(\mathbb{T})$ sous la forme d'une somme de sous-espaces cycliques dont les mesures spectrales sont toutes égales à la mesure de Lebesgue. Remarquons toutefois, qu'on ne sait plus rien dès que n n'est pas entier.

De façon plus générale, un article de S.C. Bagchi, J. Mathew et M.G. Nadkarni ([2]) donne la valeur de la multiplicité spectrale des V_φ, lorsque φ est la restriction au cercle unité d'une fonction intérieure : dans ce cas la multiplicité est finie uniquement si la fonction est un produit de Blaschke fini, et égale au nombre de ses racines dans le disque.

Plus récemment, dans [13], E. A. Robinson établit génériquement la simplicité spectrale des produit croisés sur un groupe abélien, sous certaines conditions d'approximation cyclique pour T. Ce résultat est amélioré par A. Iwanik et J. Serafin dans [8], où ces produits croisés apparaissent génériquement comme des transformations de rang 1.

La nature du spectre a été étudiée entre autres par A. Iwanik, M. Lemańczyk et D. Rudolph ([7]) qui montrent que les produits croisés de Anzaï ont un spectre de Lebesgue si ϕ est un cocycle assez régulier, dont l'intégrale de la dérivée est non nulle. Tous les opérateurs $V_{e^{2i\pi n\phi}}$, pour n non nul ont donc un spectre de Lebesgue, et il en résulte que la multiplicité spectrale de T_ϕ (c'est-à-dire celle de U_{T_ϕ}) est infinie. Cependant, comme l'avait déja remarqué A.G. Kuschnirenko dans [11], il n'existe aucun résultat sur la multiplicité de chacun des opérateurs $V_{e^{2i\pi\phi}}$, sauf dans les cas précédents.

Enfin, dans une perspective un peu différente (cf. [12]), J. Kwiatkowski et M. Lemańczyk ont construit, à partir d'un sous-ensemble quelconque de $\mathbb{N}$ contenant 1, un cocycle au dessus d'une translation ergodique, tel que la transformation associée ait pour valeurs essentielles de sa multiplicité exactement les éléments de l'ensemble donné.

Ces résultats amènent à se poser les questions suivantes :

- Que peut-on dire sur la multiplicité de l'opérateur $V_{e^{2i\pi\phi}}$ si $\phi(x) = \beta x$, où β est un réel quelconque?
- Plus généralement peut-on estimer la multiplicité sous une condition de régularité pour ϕ?

On va établir des conditions de simplicité spectrale, et plus généralement des majorations de la multiplicité spectrale, d'autant plus fines que le cocycle est régulier :

THÉORÈME 1.1: *Soit ϕ une fonction absolument continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et $\beta = \int_0^1 \phi'(t)dt$. La multiplicité spectrale de l'opérateur $V_{e^{2i\pi\phi}}$ est finie, strictement inférieure à $|\beta| + 1$ si β est non nul. Si $\beta = 0$, le spectre est simple.*

En particulier, dès que $|\beta| \leq 1$, l'opérateur $V_{e^{2i\pi\phi}}$ a un spectre simple.

THÉORÈME 1.2: *Soit ϕ un cocycle à variation bornée de $\mathbb{T}$ dans $\mathbb{R}$, alors la multiplicité spectrale de $V_{e^{2i\pi\phi}}$ est finie, majorée par* $\max(2, \frac{2}{3}\pi \operatorname{Var}(\phi))$.

Nous énoncerons plus loin des résultats plus précis dépendant de α, et plus particulièrement de son développement en fraction continue. On donnera notamment en fonction de α une condition de simplicité spectrale dans le cadre du théorème 1.2. Nous étudierons également le cas des fonctions absolument continues par morceaux.

2. Préliminaires

Dans cette partie, on établit une méthode générale pour majorer la multiplicité spectrale des opérateurs associés à un cocycle, au dessus d'une transformation ergodique "de rang 1 local", propriété qui sera définie plus loin, et que possèdent les translations ergodiques du tore. De façon générale, $(X, \mathcal{B}, \mu, \mathcal{T})$ désigne un système dynamique mesurable, où T est une transformation bijective bimesurable sur l'espace de Lebesgue $(X, \mathcal{B}, \mu)$, et μ est une mesure de probabilité T-invariante.

2.1 RAPPELS GÉNÉRAUX.

2.1.1 Multiplicité, lemme de Chacon

Le lemme énoncé ci-dessous constitue une caractérisation de la multiplicité spectrale d'un opérateur unitaire démontrée sous cette forme par R.V. Chacon ([3]); nous l'utiliserons ensuite par l'intermédiaire du corollaire qui suit.

LEMME 2.1: *Soit U un opérateur unitaire sur un espace de Hilbert séparable H, alors U a une multiplicité spectrale supérieure ou égale à m si et seulement si, il existe une famille orthonormée $(f_1, \ldots, f_m)$ de H telle que, pour tout sous-espace cyclique H_0, on ait*

$$\sum_{i=1}^{m} d^2(f_i, H_0) \geq m - 1.$$

COROLLAIRE 2.1: *S'il existe une suite de sous-espaces fermés cycliques $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $0 < c < 1$ tels que*

$$\sup_{\|f\|=1} \overline{\lim_{n\to+\infty}} d^2(f, H_n) \leq 1 - c,$$

alors U est de multiplicité finie $m \leq 1/c$.

Remarque: Pour montrer la simplicité spectrale, il suffit donc de vérifier la condition précédente avec $c > 1/2$.

2.1.2 Simplicité spectrale des transformations de rang 1 local

La définition du rang 1 local qui suit est due à J.P. Thouvenot ([5]). On rappelle qu'une **tour** associée à une transformation inversible T est une famille de parties deux à deux disjointes de la forme $(T^j B)_{0 \leq j < h}$, où B est un ensemble mesurable. On appelle h la hauteur, B la base et chacun des $T^j B$ un étage de la tour.

Définition. Soit T une transformation bijective, bimesurable sur un espace de Lebesgue $(X, \mathcal{B}, \mu)$, qui préserve μ. On dit que T est localement de rang 1 s'il existe une suite de tours $(T^j B_n)_{0 \leq j < h_n}$, vérifiant :

- (i) Il existe $\lambda > 0$ tel que $\mu(\bigcup_{0 \leq j < h_n} T^j B_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \lambda$.
- (ii) Pour toute fonction $f \in L^2(X)$, $\|f 1_{\bigcup_{j<h_n} T^j B_n} - \pi_n f\|^2 \longrightarrow_{n \to +\infty} 0$,

où π_n est le projecteur orthogonal de $L^2(X)$ sur l'espace H_n engendré par les fonctions $\{1_{T^j B_n}\}_{0 \leq j < h_n}$. Une suite de tours vérifiant les conditions précédentes sera dite "adaptée".

On notera alors $\alpha_n = \mu(B_n)$, $\lambda_n = h_n \alpha_n = \mu(\bigcup_{j<h_n} T^j B_n)$, et pour toute fonction f dans $L^2(X)$, $f_n = f 1_{\bigcup_{0 \leq j < h_n} T^j B_n}$.

Un résultat de J. L. King ([10]) donne une majoration de la multiplicité des transformations ergodiques de rang 1 local T, où l'opérateur associé, $Uf = f_o T$, correspond à un cocycle constant :

Proposition 2.1: *Les transformations ergodiques de rang 1 local sont de multiplicité finie, inférieure ou égale à $1/\lambda$.*

Rappelons le principe de la démonstration qui repose sur le corollaire 2.1. En prenant comme suite de sous-espaces fermés cycliques les espaces $\overline{H}_n$ engendrés par $\{1_{T^j B_n}\}_{j \in \mathbb{Z}}$, on cherche à majorer $d^2(f, \overline{H}_n)$ indépendamment de la fonction f de norme un. En fait on a $d^2(f, \overline{H}_n) \leq d^2(f, H_n)$, et en écrivant $d^2(f, H_n) = \|f - \pi_n f\|^2 = 1 - \|\pi_n f\|^2$, l'hypothèse du rang 1 local montre que $|\pi_n f|^2 - |f_n|^2$ tend vers 0. Il suffit donc pour conclure de montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \|f_n\|^2 = \lim_{n \to +\infty} \sum_{0}^{h_n - 1} \int_{T^j B_n} |f|^2 d\mu = \lambda.$$

Nous aurons besoin pour la suite de résultats plus précis :

LEMME 2.2: *Si T est une transformation ergodique localement de rang 1, g une fonction de $L^1(X)$ et $\delta \in [-1,1]$, alors pour toutes les suites d'entiers (a_n) et (j_n) telles que $|j_n| \leq h_n$ et $\lim_{n\to+\infty} j_n/h_n = \delta$, on a :*

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{j=a_n}^{a_n+j_n-1} \int_{T^j B_n} g d\mu = |\delta|\lambda \int_{\mathbb{T}} g d\mu.$$

Remarque: Il s'agit ici d'une indépendance asymptotique des tours de la transformation. Par ailleurs, comme la propriété est vraie pour toute suite (j_n), la différence $(\sum_{j=a_n}^{a_n+j_n-1} \int_{T^j B_n} g d\mu - \lambda |j_n|/h_n \int g d\mu)$ converge uniformément vers 0 pour toutes les suites d'entiers (j_n) et (a_n) vérifiant $|j_n| < h_n$ pour tout $n > 0$.

Preuve: Posons $\phi_n = \sum_{a_n}^{a_n+j_n-1} 1_{T^j B_n} = 1_{\bigcup_{a_n}^{a_n+j_n-1} T^j B_n}$ (car $|j_n| \leq h_n$), c'est une suite bornée de $L^\infty(X)$. Il s'agit de montrer que ϕ_n converge vers la constante $|\delta|\lambda$ pour la topologie faible $\sigma(L^\infty, L^1)$. Soit ϕ la limite faible d'une sous-suite ϕ_{n_k}. Pour toute fonction g dans $L^1(X)$, on a

$$\int g\phi_{n_k} d\mu \to_{k\to+\infty} \int g\phi d\mu.$$

Comme la mesure est invariante par T, on a $\int g\phi_{n_k} o T d\mu \longrightarrow_{k\to+\infty} \int g\phi o T d\mu$. De plus $\phi_n o T - \phi_n = 1_{T^{a_n+j_n} B_n} - 1_{T^{a_n} B_n}$, où $\mu(T^{a_n} B_n) = \mu(T^{j_n+a_n} B_n) \to 0$ et on en déduit donc que $\int g(\phi o T - \phi) d\mu = 0$. Ceci montre que ϕ est invariante par T ; elle est donc constante et vaut $|\delta|\lambda$ (en prenant pour g la fonction constante 1). Par conséquent (ϕ_n) admet cette seule valeur d'adhérence, ce qui montre sa convergence pour la topologie faible* de L^∞ vers $|\delta|\lambda$. ∎

LEMME 2.3: *Soit f une fonction de $L^2(X)$ de norme 1. Si T est ergodique localement de rang 1, G une fonction intégrable au sens de Riemann sur $[-1,1]$ et (j_n) une suite d'entiers telle que $\lim j_n/h_n = \delta$, où $|\delta| \leq 1$, alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{0}^{j_n} \left(\int_{T^j B_n} |f|^2 d\mu \right) G(j\alpha_n) = \int_0^{\lambda|\delta|} G(t) dt.$$

Preuve: La propriété résulte immédiatement du lemme 2.2, si G est une fonction caractéristique d'un intervalle ; elle est alors vraie par linéarité pour toutes les fonctions en escalier, et donc pour toutes les fonctions intégrables au sens de Riemann par encadrement avec des fonctions en escalier. ∎

2.2 Cas d'un cocycle au dessus d'une transformation ergodique de rang 1 local.

2.2.1 Notations

T est une transformation ergodique et de rang 1 local et $(T^j B_n)_{0 \leq j < h_n}$ une suite de tours adaptée. Soit ϕ un **cocycle additif** de X à valeurs dans $\mathbb{R}$, qu'on définit par une application mesurable de X dans $\mathbb{R}$. On note alors $\varphi = e^{2i\pi\phi}$ le **cocycle multiplicatif** correspondant. L'opérateur unitaire $V = V_{e^{2i\pi\phi}}$ associé à ϕ, au dessus de T, s'écrit

$$Vf(x) = \varphi(x) f_o T(x).$$

On a pour tout j dans $\mathbb{Z}$:

$$V^j f = \varphi_j f_o T^j,$$

où on note φ_j (et ϕ_j la fonction correspondante pour ϕ) la fonction de X définie par :

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} \varphi(x)\varphi(Tx)\cdots\varphi(T^{j-1}x) & \text{si } j > 0, \\ 1 & \text{si } j = 0, \\ \varphi^{-1}(T^{-1}x)\varphi^{-1}(T^{-2}x)\cdots\varphi^{-1}(T^j x) & \text{si } j < 0. \end{cases}$$

Considérons l'espace cyclique engendré par $1_{T^{j_n}B_n}$ sous V : les fonctions génératrices sont les $\varphi_j 1_{T^{j_n - j}B_n}$ pour $j \in \mathbb{Z}$, et on remarque alors que le choix de l'étage de départ modifie l'espace cyclique. On se restreindra comme précédemment aux sous-espaces engendrés par les fonctions correspondant aux étages de la tour, ce qui revient à ne retenir que les indices $j_n - j$ compris entre 0 et $h_n - 1$. De plus l'estimation apparaît meilleure pour $j_n = [h_n/2]$, car le calcul fait intervenir la variation du cocycle itéré φ_j qui augmente avec $|j|$. Pour ces raisons on notera désormais B_n l'étage du milieu de la tour d'indice n, et on considère alors les espaces de dimension finie H_n, engendré par les fonctions $\{1_{T^j B_n}\}_{|j| < h_n/2}$, et H'_n, engendré par $\{\varphi_{-j} 1_{T^j B_n}\}_{|j| < h_n/2}$. π_n et π'_n sont alors les projecteurs orthogonaux de $L^2(X)$ sur H_n et H'_n.

2.2.2 Principe général

De même que pour la démonstration de la proposition 2.1, on cherche une majoration de la distance d'une fonction normée quelconque f à H'_n, ne dépendant que du choix de la suite de tours. Sachant estimer la distance de f à H_n, on voudrait comparer celle-ci à la distance de f à H'_n. On a

$$\left| \|\pi'_n f\| - \|\pi'_n {}_o \pi_n f\| \right| \leq \|\pi'_n {}_o \pi_n f - \pi'_n f\| \leq \|\pi_n f - f_n\| \to 0,$$

et avec l'égalité $d^2(f, H'_n) = \|f\|^2 - \|\pi'_n f\|^2$, on obtient

$$d^2(f, H'_n) - (1 - \|\pi'_n {}_o \pi_n f\|^2) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Il ne reste qu'à évaluer la norme de la projection de $\pi_n f$ sur H'_n. Comme $\pi_n f$ est la projection orthogonale de f sur H_n, il s'écrit sous la forme :

$$\pi_n f = \sum_{|j|<h_n/2} \gamma_j 1_{T^j B_n}, \qquad \text{avec } \gamma_j = \frac{1}{\alpha_n}\int_{T^j B_n} f d\mu.$$

Et la projection sur H'_n vaut alors

$$\pi'_n o \pi_n f = \sum_{|j|<h_n/2} \gamma_j \left(\int_{B_n} \bar{\varphi}_j \frac{d\mu}{\alpha_n}\right) \varphi_{-j} 1_{T^j B_n}.$$

Par suite

$$\|\pi'_n o \pi_n f\|^2 = \sum_{|j|<h_n/2} \frac{|\gamma_j|^2}{\alpha_n} \left|\int_{B_n} \varphi_j d\mu\right|^2.$$

La fonction f intervient dans l'expression précédente par $|\int_{T^j B_n} f d\mu|^2$: il est en fait plus agréable de travailler sur l'intégrale de $|f|^2$ (on aura alors une expression linéaire). L'hypothèse $d^2(f_n, \pi_n f) \longrightarrow_{n\to+\infty} 0$, avec ici $f_n = f 1_{\bigcup_{|j|<h_n/2} T^j B_n}$, se traduit par

$$\begin{aligned} d^2(f_n, \pi_n f) &= \sum_{|j|<h_n/2} \left(\int_{T^j B_n} |f|^2 d\mu - |\gamma_j|^2 \alpha_n\right) \\ &= \sum_{|j|<h_n/2} \left|\int_{T^j B_n} |f|^2 d\mu - |\gamma_j|^2 \alpha_n\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \|\pi'_n o \pi_n f\|^2 = &\sum_{|j|<h_n/2} \left(|\gamma_j|^2 \alpha_n - \int_{T^j B_n} |f|^2 d\mu\right) \left|\int_{B_n} \varphi_j \frac{d\mu}{\alpha_n}\right|^2 \\ &+ \sum_{|j|<h_n/2} \int_{T^j B_n} |f|^2 d\mu \left|\int_{B_n} \varphi_j \frac{d\mu}{\alpha_n}\right|^2. \end{aligned}$$

Comme φ_j est de module 1, on a encore

$$\sum_{|j|<h_n/2} \left(|\gamma_j|^2 \alpha_n - \int_{T^j B_n} |f|^2 d\mu\right) \left|\int_{B_n} \varphi_j \frac{d\mu}{\alpha_n}\right|^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

et

$$\|\pi'_n o \pi_n f\|^2 - \sum_{|j|<h_n/2} \int_{T^j B_n} |f|^2 d\mu \left|\int_{B_n} \varphi_j \frac{d\mu}{\alpha_n}\right|^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Cette propriété reste valable en remplaçant $\|\pi'_n o \pi_n f\|$ par $\|\pi'_n f\|$ et on peut énoncer la proposition suivante :

PROPOSITION 2.2: *Soit* $(T^j B_n)_{|j|<h_n/2}$ *une suite de tours adaptée à une transformation* T *ergodique et de rang 1 local.*

- *S'il existe* $c > 0$ *vérifiant pour toute fonction de* $L^2(X)$, f, *de norme 1*

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty} \sum_{|j|<h_n/2} \int_{T^j B_n} |f|^2 d\mu \left| \int_{B_n} \varphi_j \frac{d\mu}{\alpha_n} \right|^2 \geq c, \tag{1}$$

alors la multiplicité de l'opérateur V *associé est finie, majorée par* $1/c$.

- *S'il existe* $c < \lambda$ *vérifiant pour toute fonction* f *normée dans* $L^2(X)$

$$\overline{\lim}_{n\to+\infty} \sum_{|j|<h_n/2} \int_{T^j B_n} |f|^2 d\mu \int\int_{B_n^2} |\varphi_j(y) - \varphi_j(x)| \frac{d\mu(x)d\mu(y)}{\alpha_n^2} \leq c, \tag{2}$$

alors la multiplicité de l'opérateur V *est finie, majorée par* $1/(\lambda - c)$.

Preuve: La première partie de la proposition est une conséquence directe du corollaire 2.1 : on a en effet $\overline{\lim}_{n\to+\infty} d^2(f, H'_n) \leq 1 - \underline{\lim}_{n\to+\infty} \|\pi'_n f\|^2 \leq 1 - c$. Pour la deuxième partie, on sait que $\|f_n\|^2 = \sum_{|j|<h_n/2} \int_{T^j B_n} \|f\|^2 d\mu$, et on peut donc écrire

$$\begin{aligned} &\overline{\lim}_{n\to\infty} (\|f_n\|^2 - \|\pi'_n f\|^2) \\ &= \overline{\lim}_{n\to\infty} \sum_{|j|<h_n/2} \int_{T^j B_n} |f|^2 d\mu \int\int_{B_n^2} \left(1 - \frac{\varphi_j(y)}{\varphi_j(x)}\right) \frac{d\mu(x)d\mu(y)}{\alpha_n^2} \\ &\leq \overline{\lim}_{n\to\infty} \sum_{|j|<h_n/2} \int_{T^j B_n} |f|^2 d\mu \int\int_{B_n^2} |\varphi_j(y) - \varphi_j(x)| \frac{d\mu(x)d\mu(y)}{\alpha_n^2}. \end{aligned}$$

Si (2.2) est vérifiée, on obtient alors les inégalités :

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n\to+\infty} d^2(f, H'_n) &= \overline{\lim}_{n\to+\infty} \|f\|^2 - \|f_n\|^2 + \|f_n\|^2 - \|\pi'_n f\|^2 \\ &= 1 - \lambda + \overline{\lim}_{n\to+\infty} (\|f_n\|^2 - \|\pi'_n f\|^2) \\ &\leq 1 - (\lambda - c), \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure. ∎

2.3 LA ROTATION DE α SUR $\mathbb{T}$, RAPPELS. On considère à partir de maintenant que T est la rotation de α sur $\mathbb{T}$ muni de sa mesure de Lebesgue (encore notée μ), qui est ergodique dès que α n'est pas rationnel. On sait que T est une transformation de rang 1 ([4]). Comme on aura cependant besoin d'estimer les variations du cocycle sur les étages des tours, il sera plus utile de ne considérer que des tours d'intervalles. T apparaît alors comme une transformation de rang 1 local.

En effet, dès que la longueur des intervalles tend vers 0, la condition (ii) de la définition du rang 1 local est vérifiée pour une telle suite de tours. Notons (q_n) la suite des dénominateurs de la fraction continue de α, et $\alpha_n = \|\alpha q_n\|$ ($\| \ \|$ désigne la distance à l'entier le plus proche) ; à n fixé, en choisissant b_n quelconque, les intervalles $([b_n + j\alpha, b_n + j\alpha + \alpha_n[)_{0\le j<q_{n+1}}$ sont des ensembles deux à deux disjoints (voir [9] : il suffit de remarquer que $\|j\alpha\| \geq \alpha_n$ si $|j| < q_{n+1}$), et constituent donc une tour de mesure $\lambda_n = \alpha_n q_{n+1}$. En posant $\lambda(\alpha) = \overline{\lim}_{n\to+\infty} \alpha_n q_{n+1}$, on sait que :

LEMME 2.4:
$$\min_{\alpha\notin\mathbb{Q}} \lambda(\alpha) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{5}}.$$

Remarquons que $\lambda(\alpha) = 1$ si la suite des quotients partiels est non bornée. Pour tout $\lambda \in]0, \lambda(\alpha)]$, quitte à prendre une sous-suite (encore notée n), on peut choisir une suite d'entiers (h_n) telle que $h_n \leq q_{n+1}$ et $\lim_{n\to+\infty} h_n\alpha_n = \lambda$. Si (b_n) est une suite quelconque de $[0, 1[$, on obtient donc une suite de tours adaptée $(T^j B_n)_{||j|<h_n/2}$ avec $B_n = [b_n, b_n + \alpha_n[$.

Un des problèmes qu'on rencontrera plus loin consistera à choisir les suites (b_n) et (h_n) permettant des majorations optimales pour chaque n.

3. Cas d'un cocycle affine

3.1 PREMIÈRE MAJORATION. Soit β un réel quelconque (non nul) et ϕ défini par
$$\phi(x) = \beta x \qquad \text{pour } x \in [0, 1[.$$

THÉORÈME 3.1: *La multiplicité de l'opérateur associé à ϕ au dessus de la rotation de α est finie et majorée par :*
$$\frac{\beta}{\frac{2}{\pi}\int_0^{\lambda(\alpha)\beta\pi/2} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt}.$$

Preuve: Pour tout $\lambda \leq \lambda(\alpha)$ strictement positif, on considère une suite de tours pour la rotation α, dont la mesure λ_n converge vers λ, de la forme $(T^j B_n)_{|j|<h_n/2}$ avec $B_n = [b_n, b_n + \alpha_n[$. Comme β est un réel quelconque, ϕ possède en général une discontinuité en 0. On suppose donc que 0 n'est pas intérieur à la tour (par exemple $b_n = 0$). Dans ce cas $\varphi_o T^k$ est continu sur B_n pour tout $|k| < h_n/2$, et on peut écrire sur B_n : $\varphi_j(x) = C_j \exp 2i\pi\beta jx$, où C_j est une constante de module 1, qui disparaît dans le calcul de (1). Il en découle les égalités

$$\sum_{|j|<h_n/2} \int_{T^j B_n} |f|^2 d\mu \left| \int_{B_n} \varphi_j \frac{d\mu}{\alpha_n} \right|^2 = \sum_{|j|<h_n/2} \int_{T^j B_n} |f|^2 d\mu \left| \int_{B_n} \exp 2i\pi\beta jx \frac{dx}{\alpha_n} \right|^2$$
$$= \sum_{|j|<h_n/2} \left(\int_{T^j B_n} |f|^2 d\mu \right) \left(\frac{\sin \pi\beta j\alpha_n}{\pi\beta j\alpha_n} \right)^2 .$$

Avec le lemme 2.3 cette quantité converge vers $\int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} \sin^2 \pi\beta t/(\pi\beta t)^2 dt$, et on conclut grâce à la première partie de la proposition 2.2. ∎

3.2 Majoration simple de la multiplicité.

Corollaire 3.1: *La multiplicité de l'opérateur associé à un cocycle affine de pente β non nulle est majorée strictement par $|\beta| + 1$.*

Preuve: C'est une conséquence du résultat précédent. Il suffit d'étudier le comportement du majorant précédent en tant que fonction de β (qu'on suppose positif). Posons

$$F(\beta) = \frac{\beta}{\dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\lambda(\alpha)\beta\pi/2} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^2 dt}.$$

Cette fonction étant décroissante en $\lambda(\alpha)$ il suffit d'avoir, d'après le lemme 2.4, une majoration de $[F(\beta)]$ pour $\lambda(\alpha) = \lambda$, avec

$$\lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}.$$

On va montrer que la différence $\Delta(\beta) = F(\beta) - \beta$ est strictement inférieure à 1 dès que β est assez grand. Pour les petites valeurs de β, on montrera directement que F est majorée par 2 strictement, d'où le résultat. On a la majoration

$$\int_{\pi\beta\lambda/2}^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt \le \frac{1}{\pi\beta\lambda} + \frac{2}{(\pi\beta\lambda)^2}.$$

Comme

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt = \pi/2,$$

on a l'inégalité :

$$\Delta(\beta) = \beta \int_{\pi\beta\lambda/2}^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt \left(\int_0^{\pi\beta\lambda/2} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt \right)^{-1} \leq \frac{\frac{1}{\pi\lambda} + \frac{2}{\pi^2\lambda^2}\frac{1}{\beta}}{\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi\lambda}\frac{1}{\beta}}.$$

Δ est donc strictement inférieur à 1 dès que β est supérieur strictement à β_0, donné par

$$\beta_0 = \frac{\frac{2}{\pi\lambda}\left(1 + \frac{1}{\pi\lambda}\right)}{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\pi\lambda}}.$$

Montrons maintenant que $F(\beta) < 2$ pour tout $\beta \leq \beta_0$, c'est-à-dire que

$$\int_0^{\pi\beta\lambda/2} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt > \pi\beta/4.$$

Sachant

$$\int_0^{\pi\beta\lambda/2} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt \geq \frac{\pi\beta\lambda}{2} - \frac{1}{9}\left(\frac{\pi\beta\lambda}{2}\right)^3,$$

il suffit que

$$\beta^2 < \frac{18(2\lambda - 1)}{\pi^2\lambda^3},$$

ce qui est bien vérifié pour β inférieur à β_0. ∎

4. Cas des fonctions absolument continues

Nous procèderons dans cette partie en deux étapes. On verra d'abord le cas des cocycles absolument continus de degré 0, c'est à dire dont l'intégrale de la dérivée est nulle : dans ce cas on établit la simplicité spectrale de l'opérateur associé. Nous donnerons ensuite pour les cocycles "de degré β ", c'est-à-dire dont l'intégrale de la dérivée vaut β, réel non nul quelconque, la même majoration que celle du théorème 3.1 pour les cocycles affines. Le théorème 1.1 est alors établi grâce au corollaire 3.1.

4.1 COCYCLES ABSOLUMENT CONTINUS DE DEGRÉ ZÉRO. On suppose que $\phi(x) - \phi(y) = \int_y^x \phi'(t)dt$, où ϕ' est une fonction intégrable avec $\int_0^1 \phi'(t)dt = 0$.

THÉORÈME 4.1: *Les opérateurs associés à un cocycle absolument continu, de degré 0, au dessus d'une rotation ergodique, ont un spectre simple.*

Preuve: Comme l'hypothèse sur ϕ fait intervenir sa variation sur des intervalles, nous nous servirons de la seconde partie de la proposition 2.2. De plus $\lambda(\alpha) > 1/2$, et il suffira d'établir que

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \sum_{|j|<h_n/2} \int_{T^j B_n} |f|^2 d\mu \iint_{B_n^2} |\varphi_j(y) - \varphi_j(x)| \frac{dxdy}{\alpha_n^2} = 0.$$

On a

$$\begin{aligned} |\varphi_j(x) - \varphi_j(y)| &= |\,\mathrm{e}^{2i\pi\phi_j(x)} - \mathrm{e}^{2i\pi\phi_j(y)}| \\ &\leq 2\pi|\phi_j(x) - \phi_j(y)| \\ &\leq 2\pi\left|\int_y^x |\phi_j'(t)|dt\right| \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &\sum_{|j|<h_n/2} \int_{T^j B_n} |f|^2 d\mu \iint_{B_n^2} |\varphi_j(y) - \varphi_j(x)| \frac{dxdy}{\alpha_n^2} \\ &\quad \leq 2\pi \sum_{|j|<h_n/2} \int_{T^j B_n} |f|^2 d\mu \int_{B_n} |\phi_j'| d\mu. \end{aligned}$$

Comme ϕ' est de moyenne nulle, le théorème ergodique ponctuel pour les fonctions L^1 montre que $(1/j)\phi_j'$ converge presque sûrement (et dans L^1) vers 0, et on s'attend à ce que $\int_{B_n} |\phi_j'| d\mu = o(j\alpha_n) = o(1)$. On s'aperçoit cependant qu'il y a un problème de choix de B_n pour que la convergence soit uniforme pour tous les $|j|$ inférieurs à $h_n/2$: nous utiliserons donc la propriété de convergence presque sûre des $(1/j)|\phi_j'|$ vers zéro, qui permet d'assurer le résultat grâce au lemme qui suit. ∎

LEMME 4.1: *Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut construire une suite de tours de la rotation $(T^j B_n)_{|j|<h_n/2}$, qui vérifie, pour toute fonction f normée :*

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \sum_{|j|<h_n/2} \int_{T^j B_n} |f|^2 d\mu \int_{B_n} |\phi_j'| d\mu \leq \varepsilon.$$

Preuve: Soit $\varepsilon > 0$ donné, on note $\delta > 0$ tel que, pour tout borélien C, on ait :

$$\mu(C) < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \int_C |\phi'| d\mu < \varepsilon/2.$$

Pour tout entier k, on définit

$$A_k = \left\{x, \left|\frac{1}{j}\phi_j'\right|(x) < \varepsilon \text{ quel que soit } j, |j| \geq k\right\} :$$

alors $\mu(A_k) \longrightarrow_{k\to+\infty} 1$. Choisissons k tel que $\mu(A_k) > 0$. Soit x un point de densité de A_k, il existe alors η, tel que pour tout intervalle I contenant x

$$\mu(I) < \eta \qquad \Longrightarrow \qquad \mu(I\setminus(A_k \cap I)) < \delta\mu(I).$$

Choisissons alors une base $B_n = [b_n, b_n + \alpha_n[$ telle que x soit dans B_n. Pour n assez grand on a $\alpha_n < \eta$ et $B_n \subset]x - \eta, x + \eta[$. Par conséquent

$$\mu\left(\bigcup_{|j|<h_n/2} T^j(B_n\setminus A_k)\right) \leq h_n\mu(B_n)\delta \leq \lambda_n\delta < \delta.$$

Pour tout entier $|j| < k$, dès que $2k\alpha_n < \delta$ on a

$$\int_{B_n} |\phi'_j| d\mu \leq \int_{B_n} \sum_{|l|<k} |\phi' o T^l| d\mu \leq \int_{\bigcup_{|l|<k} T^l B_n} |\phi'| d\mu < \varepsilon.$$

Si $|j| \geq k$, on obtient les inégalités

$$\begin{aligned}\int_{B_n} |\phi'_j| d\mu &\leq \int_{B_n\cap A_k} |\phi'_j| d\mu + \int_{B_n\setminus A_k} |\phi'_j| d\mu \\ &\leq \varepsilon|j|\alpha_n + \int_{\bigcup_{|l|<h_n/2} T^l(B_n\setminus A_k)} |\phi'| d\mu \\ &\leq \frac{\lambda_n}{2}\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.\end{aligned}$$

Comme $\sum_{|j|<h_n/2} \int_{T^j B_n} |f|^2 d\mu \leq 1$, on en déduit la majoration voulue. ∎

4.2 Cas d'un cocycle absolument continu, avec au plus une discontinuité en 0. On suppose encore que ϕ est absolument continu, et on note $\beta = \int_0^1 \phi'(t)dt$ où β est un réel quelconque (non nul).

Théorème 4.2: *Tout opérateur au dessus de la rotation α associé à un cocycle absolument continu, et de degré β non nul, a une multiplicité majorée par*

$$\frac{\beta}{\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\lambda(\alpha)\beta\pi/2} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt}.$$

Preuve: L'idée qui apparaît ici est de "recoller" les cas précédents : on décompose ϕ sous la forme d'une somme d'une fonction absolument continue de degré zéro, ϕ^0, et d'une fonction affine de pente β, $\phi^\beta(x) = \beta x$:

$$\phi(x) = \phi^0(x) + \phi^\beta(x).$$

On note, pour une suite de tours donnée, H'_n (respectivement H^{β}_n, et H^0_n), l'espace engendré par $\{\varphi_{-j}1_{T^jB_n}\}_{|j|<h_n/2}$ (respectivement $\{\varphi^{\beta}_{-j}1_{T^jB_n}\}_{|j|<h_n/2}$, et $\{\varphi^0_{-j}1_{T^jB_n}\}_{|j|<h_n/2}$). Si on prend une suite de tours pour laquelle l'expression (2.2) de la proposition 2.2, avec ϕ^0, tend vers 0, on montrera que les normes des projections d'une fonction normée f, π'_nf et π^{β}_nf sur H'_n et H^{β}_n, ont même limite. Dans ces conditions, il restera alors à s'assurer qu'on peut choisir une suite de tours qui soit adaptée simultanément aux deux cocycles : autrement dit, peut-on trouver une tour qui "évite" 0, et qui soit encore adaptée à ϕ^0 ?

Reprenons la construction du lemme 4.1 : ε étant fixé, la seule condition pour ϕ^0, est que $B_n = [b_n, b_n+\alpha_n[$ contienne un point de densité x de A_k. Pour que la tour convienne également au cocycle affine, il suffit qu'elle ne contienne pas 0. Prenons alors un point de densité x de A_k : si 0 n'est pas dans la tour de base $[x, x+\alpha_n[$ et de hauteur h_n, celle-ci convient ; sinon il existe j, $|j|<h_n/2$, tel que $j\alpha \in [x, x+\alpha_n[$, et en prenant la tour définie avec $b_n = j\alpha-\alpha_n$, on a bien x dans $[b_n, b_n+\alpha_n[$, et 0 sur le bord de la tour. La suite de tours étant ainsi déterminée, on vérifie facilement que $\overline{\lim}_{n\to+\infty}\left|\|\pi'_nf\|^2-\|\pi^{\beta}_nf\|^2\right| \le 2\pi\varepsilon$:

$$\begin{aligned}
&\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\|\pi'_nf\|^2-\|\pi^{\beta}_nf\|^2\right| = \overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\|\pi'_n\pi_nf\|^2-\|\pi^{\beta}_n\pi_nf\|^2\right|\\
&\le \overline{\lim_{n\to\infty}}\sum_{|j|<h_n/2}\frac{\int_{T^jB_n}|f|^2d\mu}{\alpha_n^3}\left|\left|\int_{B_n}\varphi_jd\mu\right|^2-\left|\int_{B_n}\varphi^{\beta}_jd\mu\right|^2\right|\\
&\le \overline{\lim_{n\to\infty}}\sum_{|j|<h_n/2}\frac{\int_{T^jB_n}|f|^2d\mu}{\alpha_n^3}\int\int_{B_n^2}\left|\varphi^0_j(x)\bar{\varphi}^0_j(y)-1\right|dxdy\\
&\le 2\pi\,\overline{\lim_{n\to\infty}}\sum_{|j|<h_n/2}\int_{T^jB_n}|f|^2d\mu\int_{B_n}|\phi^{0'}_j|d\mu\\
&\le 2\pi\varepsilon.
\end{aligned}$$

Alors on obtient la minoration, valable pour toutes les fonctions f normées,

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty}\|\pi'_nf\|^2 \ge \lim_{n\to+\infty}\|\pi^{\beta}_nf\|^2-2\pi\varepsilon,$$

où ε est un réel positif quelconque. En utilisant le corollaire 2.1, on en déduit immédiatement que la majoration de la multiplicité est la même que dans le cas affine. ∎

4.3 Cas d'un cocycle absolument continu par morceaux. On considère un cocycle ϕ absolument continu par morceaux admettant une dérivée intégrable sur les intervalles où ϕ est continu, avec N discontinuités $x_1,\ldots,x_N$

$(N \geq 2)$, et $\beta = \int_0^1 \phi'(t)dt$. On décompose comme précédemment le cocycle en une somme de deux cocycles, $\phi = \phi^0 + \phi^\beta$, où ϕ^0 est absolument continu de degré 0, et ϕ^β un cocycle affine par morceaux et de pente constante β sur les intervalles où il est continu. On peut énoncer le résultat suivant

THÉORÈME 4.3: *Avec ces hypothèses, la multiplicité spectrale de l'opérateur associé à ϕ, au dessus de la rotation de α, est majorée par*

$$\frac{\beta}{\frac{2}{\pi}\int_0^{\lambda\beta\pi/2}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt}, \qquad \text{où } \lambda = \lambda(N,\alpha) = \max\left(\frac{\lambda(\alpha)}{N-1}, \frac{1}{N}\right).$$

Preuve: La majoration vient du calcul sur ϕ^β, qui s'effectue comme dans le cas affine, dès que les tours considérées ne contiennent pas de points de discontinuité : pour cela il faudra réduire les largeurs ou les hauteurs initiales. Le "recollement" a partir du lemme 4.1 avec ϕ^0 est un peu délicat, car les tours évitant $x_1, \ldots, x_N$ sont limitées : le choix d'un point de densité devient donc important.

4.3.1 Majoration avec $\lambda = 1/N$

On reprend la construction du lemme 4.1. Soit une tour de base $B_n = [b_n, b_n + \alpha_n[$, et de hauteur $h_n \leq q_{n+1}$. La mesure de l'ensemble des b_n tels que cette tour contienne x_1 est égale à $\lambda_n = \alpha_n h_n$. Alors, si $\mathcal{D}_n$ est l'ensemble des points b_n tels que la tour associée ne contienne aucun point de discontinuité, on a $\mu(\mathcal{D}_n) \geq 1 - N\lambda_n$. Soit $\theta \in]0,1[$, on choisit une suite (h_n) telle que $N\lambda_n$ converge vers $1-\theta$, et k un entier suffisamment grand pour que $\mu(A_k) \geq 1 - \theta/2$: alors $(\mathcal{D}_n \cap A_k)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'ensembles dont la mesure est asymptotiquement plus grande que $\theta/2$, ce qui permet de dire que $\mu(\overline{\lim}_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{D}_n \cap A_k) \geq \theta/2$. Quitte à remplacer (b_n, α_n, h_n) par une sous-suite, on peut trouver un point de densité x de A_k tel que

$$x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{D}_n \cap A_k.$$

Les tours de base $B_n = [x, x + \alpha_n[$ et de hauteur h_n ne possèdent par conséquent aucune discontinuité, et x est dans B_n. Cette suite de tours vérifie donc l'inégalité du lemme 4.1. Comme de plus λ_n converge vers $(1-\theta)/N$, la majoration est la même que dans le cas affine avec $\lambda = (1-\theta)/N$; et en prenant la limite quand θ tend vers 0, on obtient le résultat avec $\lambda = 1/N$.

4.3.2 Majoration avec $\lambda = \lambda(\alpha)/(N-1)$

Toujours dans le cadre du lemme 4.1, on considère d'abord une tour de base $B_n = [b_n, b_n + \alpha_n[$, et de hauteur h_n telle que $\lambda_n = \alpha_n h_n$ converge vers $\lambda(\alpha)$. On dira que la tour $(T^j B'_n)_{|j|<h'_n/2}$ est une sous-tour de la tour de base B_n et de hauteur h_n, si $h'_n \leq h_n$ et $B'_n \subset B_n$. Alors, dès que B_n contient un point de densité x de A_k (fixé ultérieurement), le lemme 4.1 s'applique pour n'importe quelle suite de sous-tours des tours de base B_n et de hauteur h_n. Il s'agira donc ici de determiner dans un premier temps une base B_n convenable, puis de choisir une sous-tour optimale qui ne contienne aucun point de discontinuité (même si sa base ne contient plus x).

Soit $\theta \in]0,1[$, on appelle $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des points b_n tels que la tour $(T^j[b_n, b_n + \theta\alpha_n[)_{-h_n/2<j<-h_n/2+\theta h_n}$ contienne x_1. On a $\mu(\mathcal{D}_n) = \theta^2\lambda_n$, et en choisissant k assez grand pour que $\mu(A_k) > 1 - \theta^2\lambda/2$, on peut comme dans le cas précédent, quitte à prendre une sous-suite, trouver un point de densité x dans A_k tel que x_1 appartienne aux tours $(T^j[x, x + \theta\alpha_n[)_{-h_n/2<j<-h_n/2+\theta h_n}$. Nous obtenons donc une suite de tours de base $B_n = [x, x + \alpha_n[$ et de hauteur h_n pour qui le lemme 4.1 s'applique.

Considérons à présent un second point de discontinuité x_2 :

Si x_2 est dans la sous-tour $(T^j[x, x + \theta\alpha_n[)_{|j|<h_n/2}$, ou en dehors de la tour principale, alors on considère la sous-tour de base $B'_n =]x + \theta\alpha_n, x + \alpha_n[$ et de hauteur h_n qui ne contient au plus que $N-2$ points de discontinuités. Sinon x_2 est dans la sous-tour de base $[x + \theta\alpha_n, x + \alpha_n[$, et de hauteur h_n. Alors il existe $|j| < h_n/2$ tel que $T^j x_2$ appartienne à $[x + \theta\alpha_n, x + \alpha_n[$, et on choisit comme nouvelle base $B'_n = [T^j x_2 - \alpha_n, T^j x_2[$: on a toujours x dans B'_n, et x_1 dans les θh_n premiers étages de la tour de base B'_n et de hauteur h_n. La sous-tour $(T^j B'_n)_{|j|<h'_n/2}$, où $h'_n = h_n(1-2\theta)$, ne contient donc plus que $N-2$ points de discontinuité.

En projetant maintenant ceux-ci sur la base, on décompose B'_n en $N-1$ intervalles, dont le plus grand est de longueur supérieure à $\alpha_n(1-\theta)/(N-1)$, et qui définissent chacun les bases de sous-tours de hauteurs supérieures ou égales à $h_n(1-2\theta)$ sans points de discontinuité. On peut donc choisir une suite de sous-tours, évitant $x_1, \ldots, x_N$, qui permet le calcul de la majoration de la multiplicité avec $\lambda \geq \lim h_n(1-2\theta)\alpha_n(1-\theta)/(N-1) = \lambda(\alpha)(1-\theta)(1-2\theta)/(N-1)$, ce qui donne le résultat cherché. ∎

5. Cas d'une fonction à variation bornée

Soit ϕ un cocycle à variation bornée, qu'on pourra supposer continu à droite, alors pour $y \leq x$, $\phi(x) - \phi(y) = \nu(]y, x])$ où ν est une mesure borélienne finie. On note $\mathrm{Var}(\phi) = |\nu|(]0, 1])$. La différence par rapport à la partie précédente réside dans le fait qu'on n'a plus ici le théorème ergodique pour la dérivée de ϕ : il faudra donc travailler directement sur la variation totale du cocycle, ce qui, bien sûr, donnera une majoration moins fine qu'auparavant.

THÉORÈME 5.1: *Si ϕ est un cocycle à variation bornée, alors la multiplicité de l'opérateur associé au dessus d'une rotation de α est majorée par*

$$\max(2, 2\pi\,\mathrm{Var}(\phi)/3).$$

De plus le spectre est simple si on a l'inégalité

$$\mathrm{Var}(\phi) < \frac{3}{\pi}\frac{2\lambda(\alpha) - 1}{\lambda(\alpha)^2}.$$

Remarque: La fonction de $\lambda(\alpha)$ ci-dessus croît dans $[3(3\sqrt{5} - 5)/2\pi, 3/\pi]$, ce qui permet d'avoir une simplicité spectrale pour tout α lorsqu'on a l'inégalité $\mathrm{Var}(\phi) \leq 3(3\sqrt{5} - 5)/2\pi$ (de l'ordre de 0.81).

Preuve: Pour simplifier les notations, on écrira ν à la place de sa valeur absolue. On a pour tout (x, y) et pour tout j positif :

$$\begin{aligned}
|\varphi_j(x) - \varphi_j(y)| &\leq \sum_0^{j-1} |\varphi_o T^k(x) - \varphi_o T^k(y)| \\
&\leq 2\pi \sum_0^{j-1} |\phi_o T^k(x) - \phi_o T^k(y)| \\
&\leq 2\pi \sum_0^{j-1} \left| \int_y^x d\nu_o T^k \right|.
\end{aligned}$$

On note $B_n = [b_n, b_n + \alpha_n[$ (intervalle du cercle unité), où b_n est a priori quelconque (on se réserve le choix d'une translation sur la tour). On choisit également $h_n \leq q_{n+1}$ tel que $\lambda_n = h_n\alpha_n$ converge vers λ inférieur ou égal à $\lambda(\alpha)$. On travaille alors sur l'inégalité (2.2) de la proposition 2.2, et on cherche donc à majorer l'expression :

$$d_n = \sum_{|j| < h_n/2} \int_{T^j B_n} |f|^2 d\mu \int\int_{B_n^2} |\varphi_j(y) - \varphi_j(x)| \frac{dxdy}{\alpha_n^2}.$$

En écrivant $d_n = d_n^{(1)} + d_n^{(2)}$, où $d_n^{(1)}$ est la somme pour les indices négatifs, et $d_n^{(2)}$ le reste, on a les inégalités suivantes pour $d_n^{(1)}$:

$$\begin{aligned} d_n^{(1)} &\leq 2\pi \sum_{j=0}^{[h_n/2]} \int_{T^{-j}B_n} |f|^2 d\mu \sum_{k=1}^{j} \int\int_{B_n^2} \left| \int_y^x d\nu_o T^{-k}(u) \right| \frac{dxdy}{\alpha_n^2} \\ &\leq 4\pi \sum_{j=0}^{[h_n/2]} \int_{T^{-j}B_n} |f|^2 d\mu \sum_{k=1}^{j} \int_{B_n} \frac{(u-b_n)(\alpha_n+b_n-u)}{\alpha_n^2} d\nu_o T^{-k}(u) \\ &\leq 4\pi \sum_{k=1}^{[h_n/2]} \left(\sum_{j=k}^{[h_n/2]} \int_{T^{-j}B_n} |f|^2 d\mu \right) \int_{B_n} \frac{(u-b_n)(\alpha_n+b_n-u)}{\alpha_n^2} d\nu_o T^{-k}(u). \end{aligned}$$

Or, on peut remplacer l'intégrale de $|f|^2$ sur $(h_n/2 - |k|)$ étages consécutifs de la tour par $\lambda(1/2 - |k|/h_n)$ pour tous les $|k|$ inférieurs à $h_n/2$. En effet :

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{k=1}^{[h_n/2]} \left(\lambda(\frac{1}{2} - \frac{k}{h_n}) - \sum_{j=k}^{[h_n/2]} \int_{T^{-j}B_n} |f|^2 d\mu \right) \int_{B_n} \frac{(u-b_n)(\alpha_n+b_n-u)}{\alpha_n^2} d\nu_o T^{-k}(u) \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{[h_n/2]} \left| \lambda(\frac{1}{2} - \frac{k}{h_n}) - \sum_{j=k}^{[h_n/2]} \int_{T^{-j}B_n} |f|^2 d\mu \right| \int_{B_n} d\nu_o T^{-k}(u) \\ &\leq \mathrm{Var}(\phi) \sup_{0<k<h_n/2} \left| \lambda(\frac{1}{2} - \frac{k}{h_n}) - \sum_{j=k}^{[h_n/2]} \int_{T^{-j}B_n} |f|^2 d\mu \right|, \end{aligned}$$

et cette quantité tend vers 0, grâce à la remarque suivant le lemme 2.2. On obtient finalement, en majorant de même $d_n^{(2)}$, l'inégalité

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} d_n \leq \overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{4\pi\lambda}{h_n} \sum_{|k|<h_n/2} (h_n/2 - |k|) \int_{B_n} \frac{(u-b_n)(\alpha_n+b_n-u)}{\alpha_n^2} d\nu_o T^k(u).$$

Pour obtenir la meilleure majoration possible, il reste à choisir la suite des tours $(T^j B_n)_{|j|<h_n/2}$ de façon à ce que le second membre soit le plus petit possible.

Remarquons que, ν étant une mesure positive finie sur $\mathbb{T}$ et G une fonction mesurable positive, on a

$$\int_{\mathbb{T}} db \int_{\mathbb{T}} G(t-b) d\nu(t) = \int_{\mathbb{T}} d\nu(t) \int_{\mathbb{T}} G(b) db,$$

et il existe donc b tel que :

$$\int_{\mathbb{T}} G(t-b) d\nu(t) \leq \nu(\mathbb{T}) \int_{\mathbb{T}} G(t) dt.$$

En posant ici

$$G_n(b) = \frac{4\pi\lambda}{h_n} \sum_{|k|<h_n/2} (h_n/2-|k|) g_n o T^k(b) \qquad \text{où} \qquad g_n(b) = \frac{b(\alpha_n - b)}{\alpha_n^2} 1_{[0,\alpha_n]}(b),$$

on a

$$\int_{B_n} \frac{(u-b)(\alpha_n+b-u)}{\alpha_n^2} d\nu o T^k(u) = \int_{\mathbb{T}} g_n o T^{-k}(t-b) d\nu(t).$$

On en déduit qu'il existe une suite (b_n) telle que :

$$\begin{aligned}
\overline{\lim_{n\to+\infty}} d_n &\leq \overline{\lim_{n\to+\infty}} \int_{\mathbb{T}} G_n(t-b_n) d\nu(t) \\
&\leq \operatorname{Var}(\phi) \overline{\lim_{n\to+\infty}} \int_{\mathbb{T}} G_n(b) db \\
&\leq 4\pi\lambda \operatorname{Var}(\phi) \overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{1}{h_n} \sum_{|k|<h_n/2} (h_n/2-|k|) \int_{\mathbb{T}} g_n o T^{-k}(b) db \\
&\leq 4\pi\lambda \operatorname{Var}(\phi) \overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{1}{h_n} \int_0^{\alpha_n} \frac{b(\alpha_n-b)}{\alpha_n^2} db \sum_{|k|<h_n/2} (h_n/2-|k|) \\
&\leq \frac{\pi}{6} \lambda^2 \operatorname{Var}(\phi).
\end{aligned}$$

Finalement on peut appliquer la proposition 2.2 dès que $\pi\lambda^2 \operatorname{Var}(\phi)/6 < \lambda$, ce qui donne

$$m \leq \frac{1}{\lambda - \pi\lambda^2 \operatorname{Var}(\phi)/6} \qquad \text{pour tout } \lambda \in]0, \min(\lambda(\alpha), \frac{6}{\pi \operatorname{Var}(\phi)})[.$$

L'inverse de la fonction de λ ci-dessus atteint son maximum, $3/(2\pi \operatorname{Var}(\phi))$, en $3/(\pi \operatorname{Var}(\phi))$, d'où si $\lambda(\alpha) \geq 3/(\pi \operatorname{Var}(\phi))$, alors $m \leq (2\pi \operatorname{Var}(\phi))/3$. Remarquons dans ce cas que le majorant est toujours minoré par $2/\lambda(\alpha) \geq 2$ et on ne peut donc pas montrer de simplicité spectrale.

Si $\lambda(\alpha) < 3/(\pi \operatorname{Var}(\phi))$, le meilleur majorant est réalisé pour $\lambda = \lambda(\alpha)$, et on obtient

$$m \leq \frac{1}{\lambda(\alpha) - \pi\lambda(\alpha)^2 \operatorname{Var}(\phi)/6}.$$

Comme $\pi \operatorname{Var}(\phi)/6 < 2/\lambda(\alpha)$, on a alors $m \leq 2/\lambda(\alpha)$. On vérifie facilement que $2/\lambda(\alpha) < 3$ quel que soit α, d'où $m \leq 2$, ce qui démontre la première assertion du théorème. Dans ce cas la simplicité spectrale est déterminée par la condition $\lambda(\alpha) - \lambda(\alpha)^2\pi \operatorname{Var}(\phi)/6 > 1/2$, ce qui équivaut au second résultat du théorème. ∎

References

[1] H. Anzai, *Ergodic skew product transformations on the torus*, Osaka Journal of Mathematics **3** (1951), 83–99.

[2] S. C. Bagchi, J. Mathew and M. G. Nadkarni, *On systems of imprimitivity on locally compact abelian groups with dense actions*, Acta Mathematica **133** (1974), 287–304.

[3] R. V. Chacon, *Approximation and spectral multiplicity*, in *Contributions to Ergodic Theory and Probability* (A. Dold and B. Eckmann, eds.), Springer, Berlin, 1970, pp. 18–27.

[4] A. Del Junco, *Transformations with discrete spectrum are stacking transformations*, Chinese Journal of Mathematics **24** (1976), 836–839.

[5] S. Ferenczi, *Systèmes localement de rang un*, Annales de l'Institut Henri Poincaré **20** (1984), 35–51.

[6] H. Helson, *Cocycles on the circle*, Journal of Operator Theory **16** (1986), 189–199.

[7] A. Iwanik, M. Lemańczyk and D. Rudolph, *Absolutely continuous cocycles over irrational rotations*, Israel Journal of Mathematics **83** (1993), 73–95.

[8] A. Iwanik and J. Serafin, *Most monothetic extensions are rank one*, Colloquium Mathematicum **66** (1993), 63–76.

[9] A. Khinchin, *Continued Fractions*, University of Chicago Press, 1964.

[10] J. L. King, *Joining-rank and the structure of finite rank mixing transformations*, Journal d'Analyse Mathématique **51** (1988), 182–227.

[11] A. G. Kuschnirenko, *Spectral properties of some dynamical systems with polynomial divergence of orbits*, Vestnik Moskovskogo Universiteta **1–3** (1974), 101–108.

[12] J. Kwiatkowski and M. Lemańczyk, *On the multiplicity function of ergodic group extensions 2*, Studia Mathematica **116** (1995), 207–215.

[13] E. A. Robinson, *Non abelian extensions have nonsimple spectrum*, Compositio Mathematica **65** (1988), 155–170.